Lois de Kepler corrigé

4 **1. a.** Après le lancer, Louisa et son canoë vont se déplacer dans le sens opposé à la pierre.

b. D'après le principe des actions réciproques, Louisa exerce une action mécanique sur la pierre modélisée par une force d'égale intensité, de même direction mais de sens opposé à celle qui modélise l'action mécanique qu'exerce la pierre sur Louisa. C'est cette dernière action mécanique qui est responsable du mouvement de Louisa et de son canoë.

2. a. Avant le lancer, le système (S) est un système pseudo-isolé car les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur lui se compensent.

b. On a $\vec{p}_{\text{avant}}(S) = (m_L + m_C + m_P) \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

3. a. On a $\vec{p}_{\text{après}}(S) = (m_L + m_C) \cdot \vec{v} + m_P \cdot \vec{v}_P$. Comme le système (S) est pseudo-isolé, sa quantité de mouvement se conserve, on a $\vec{p}_{\text{avant}}(S) = \vec{p}_{\text{après}}(S)$,

donc $\vec{0} = (m_L + m_C) \cdot \vec{v} + m_P \cdot \vec{v}_P$

et donc finalement $\vec{v} = -\dfrac{m_P \cdot \vec{v}_P}{m_L + m_C}$.

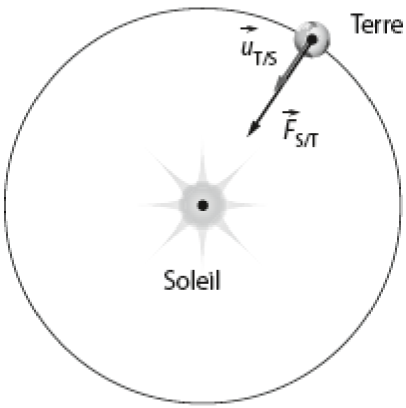
Donc $v = \dfrac{m_P \cdot v_P}{m_L + m_C} = \dfrac{4{,}2 \times 2{,}5}{55 + 39} = 0{,}11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b. On constate, grâce à l'égalité vectorielle, que le sens $\vec{v}$ est opposé à celui de $\vec{v}_P$; donc le canoë et Louisa se déplacent vers l'avant du canoë.

Le mouvement du canoë est alors rectiligne uniforme. Cela n'est vrai que si on peut négliger tous les frottements, ce qui n'est bien sûr pas le cas dans la réalité.

8 **1.** On doit se placer dans le référentiel héliocentrique galiléen.

2. $\vec{F}_{S/T} = \dfrac{G \cdot M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2} \cdot \vec{u}_{TS}$ où $\vec{u}_{TS}$ est un vecteur unitaire porté par la droite (ST) orienté de T vers S.



3. On applique la deuxième loi de Newton à la Terre : $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{S/T}$

donc $M_T \cdot d\vec{v}_T/dt = \dfrac{G \cdot M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2} \cdot \vec{u}_{TS}$

donc $\vec{a}_T = \dfrac{G \cdot M_S}{d_{ST}^2} \cdot \vec{u}_{TS}$.

4. On a alors $\vec{v}_T \cdot \vec{a}_T = 0$, donc le mouvement de la Terre est uniforme.

5. On a $a_T = \dfrac{G \cdot M_S}{d_{ST}^2} = \dfrac{v_T^2}{d_{ST}}$ (car le mouvement est uniforme), donc $v_T = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_S}{d_{ST}}}$.

Donc $v_T = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_S}{d_{ST}}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}{149{,}6 \times 10^9}}$
$= 2{,}98 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

6. L'orbite de la Terre est un cercle de rayon d_{ST} donc la distance parcourue pendant la durée T_T est la circonférence du cercle $2\,\pi \cdot d_{ST}$ donc :

$$T_T = \frac{2\pi \cdot d_{ST}}{v_T} = \frac{2\pi \times 149{,}6 \times 10^9}{2{,}98 \times 10^4} = 3{,}15 \times 10^7 \text{ s.}$$

Donc $T_T = \dfrac{3{,}15 \times 10^7}{24 \times 3\,600} = 365$ j.

11 **1.** Un référentiel planétocentrique est un référentiel centré sur une planète et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.

2. Première loi de Kepler : dans un référentiel planétocentrique, l'orbite d'un satellite est une ellipse dont le centre de la planète occupe un des deux foyers.

Deuxième loi de Kepler : le segment reliant la planète au satellite balaye des aires égales pendant des durées égales.

Troisième loi de Kepler : le rapport entre le carré de la période de révolution T du satellite et le cube du demi-grand axe a de son orbite elliptique est constant, soit :

$\dfrac{T^2}{a^3} = \text{k}$ avec T en seconde (s), a en mètre (m) et k est une constante qui ne dépend que de l'astre attracteur : la planète.

$\text{k} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_P}$ avec G constante de gravitation universelle :

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et M_P masse de la planète en kilogramme (kg).

3. Si le satellite a une trajectoire circulaire, alors on peut déduire de la deuxième loi de Kepler que sa vitesse est constante.

4. a. La troisième loi de Kepler devient : le rapport entre le carré de la période de révolution T du satellite et le cube du rayon r de son orbite circulaire est constant, soit :

$\dfrac{T^2}{r^3} = \text{k}$ avec T en seconde (s) et r en mètre (m) (l'expression de k est inchangée).

b. On a donc $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 \cdot G \cdot M_P}{4\pi^2}}$.

12 **1.** On doit se placer dans un référentiel centré sur Saturne supposé galiléen.

2. Troisième loi de Kepler : le rapport entre le carré de la période de révolution T_E d'Encelade et le cube du rayon r_E de son orbite circulaire est constant, soit :

$\frac{T_E^2}{r_E^3} = k$ avec T_E en seconde (s), r_E en mètre (m) et k est une constante qui ne dépend que de l'astre attracteur : Saturne.

$k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$ avec G constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ et M_S masse de Saturne en kilogramme (kg).

3. On a donc :

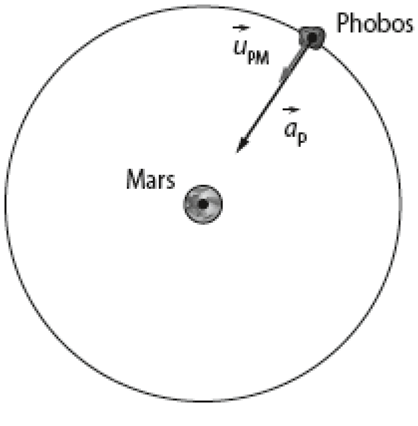
$$r_E = \sqrt[3]{\frac{T_E^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{(1{,}37 \times 24 \times 3\,600)^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}69 \times 10^{26}}{4\pi^2}}$$
$$= 2{,}38 \times 10^8\ m.$$

17 **1.** On doit se placer dans un référentiel centré sur Mars supposé galiléen.

2. On applique la deuxième loi de Newton à ce satellite : $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{T/P}$ donc :

$m_P \cdot d\vec{v}_P/dt = \frac{G \cdot M_M \cdot m_P}{r^2} \cdot \vec{u}_{PM}$ donc $\vec{a}_P = \frac{G \cdot M_M}{r^2} \cdot \vec{u}_{PM}$.

3.



4. On a alors $\vec{v}_P \cdot \vec{a}_P = 0$, donc le mouvement de Phobos est uniforme.

5. a. On a $a_P = \frac{v_P^2}{r}$ car le mouvement est uniforme.

b. On a alors $a_P = \frac{G \cdot M_M}{r^2} = \frac{v_P^2}{r}$ donc $v_P = \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}$.

c. $\left[\sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}\right] = \sqrt{\frac{L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M}{L}} = \sqrt{L^2 \cdot T^{-2}} = L \cdot T^{-1}$

donc $\sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}$ est bien homogène à une vitesse en $m \cdot s^{-1}$.

d. $v_P = \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}42 \times 10^{23}}{9{,}38 \times 10^6}}$

$= 2{,}14 \times 10^3\ m \cdot s^{-1} = 2{,}14 \times 10^3 \times 3{,}6\ km \cdot h^{-1}$
$= 7{,}70 \times 10^3\ km \cdot h^{-1}$.

6. a. L'orbite de Phobos est un cercle de rayon r donc la distance parcourue pendant la durée T_P est la circonférence du cercle $2\pi \cdot r$ donc $T_P = \frac{2\pi \cdot r}{v_P}$.

b. $\frac{T_P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{v_P^2 \cdot r^2} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_M}$.

c. On retrouve la troisième loi de Kepler.

d. $T_P = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_M}} = 2\pi \sqrt{\frac{(9{,}38 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}42 \times 10^{23}}}$

$= 2{,}76 \times 10^4\ s = 7{,}67\ h.$